Geometria Dinâmica e a lei dos cossenos

Marcus Alexandre Nunes e Maria Alice Gravina

(publicado na Revista do Professor de Matemática , No. 52)

Todos nós, professores, sabemos o quanto é difícil despertar o interesse dos alunos pelas aulas de Matemática. No geral, em uma turma, poucos são os alunos que gostam de pensar em Matemática e com esses é fácil trabalhar. Com o advento dos recursos de informática, abrem-se possibilidades que podem nos ajudar na tarefa didática e no propósito de ter um maior número de alunos interessados no assunto.

Especialmente para o aprendizado da Geometria têm-se os programas que oferecem "figuras em movimento" na tela do computador — são os programas de Geometria Dinâmica (ver **RPM** 49, p. 22). As figuras são construídas com régua e compasso virtuais e também via opções de menu em linguagem da geometria - retas paralelas, retas perpendiculares, mediatriz, bissetriz, etc. Nessa interface têm-se objetos geométricos que podem ser manipulados, que se modificam, mas que guardam as propriedades geométricas impostas à construção e, conseqüentemente, as propriedades que dessas decorrem.

Com o movimento das figuras, os alunos podem fazer muitas experiências, evidenciar novas propriedades geométricas, fazer conjeturas e, com a ajuda do professor, buscar explicações para o que está sendo empiricamente constatado. Estamos aqui falando em aprender a demonstrar — aspecto da formação matemática dos alunos que na escola, cada vez mais, vem sendo desconsiderado.

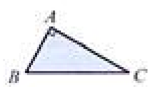
No que segue, para ilustrar como programas de geometria dinâmica podem contribuir para o ensino e aprendizado (mais interessante), apresentamos duas possíveis situações de sala de aula, ambas tendo como intenção a aprendizagem do clássico teorema de Pitágoras.

A primeira situação, como veremos, não vai além de uma simples constatação do teorema e indica uma utilização de programas de geometria dinâmica aquém do seu potencial. Já a segunda situação direciona-se para o entendimento da demonstração do teorema, e mais, insere-o como um caso particular de uma propriedade mais geral, a saber, a lei dos cossenos. Veremos como as "figuras em movimento" ajudam a evidenciar e a explicar relações entre as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados de um triângulo qualquer. (As figuras apresentadas no artigo podem ser vistas "em movimento" no *site* Educação Matemática e Tecnologia Informática em http://www.mat.ufrgs.br/edumatec , no *link* "Atividades".)

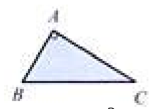
Primeira situação: uma mera constatação do teorema de Pitágoras

Nessa situação, os alunos iniciam a aula recebendo instruções em folha escrita que serve de roteiro para a realização da atividade:

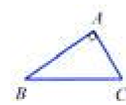
> *"construa um triângulo retângulo* ABC, *com ângulo reto em* A; *usando o recurso de medida e de calculadora do programa, meça os comprimentos dos lados* a (*hipotenusa*), *b e c* (*catetos*) *e calcule* a^2 e $b^2 + c^2$; *compare os resultados obtidos; movimente os vértices do triângulo e observe o que acontece com os cálculos feitos ..."*



a =2,87 cm a =8,23 cm^2
b=2,50 cm b^2+c^2= 8,23 cm^2
c =1,41 cm



a =3,22 cm a^2 =10,39 cm^2
b =2,69 cm b^2+c^2 = 10,39 cm^2
c =1,77 cm



a =3,03 cm a^2=9,17 cm^2
b =1,74 cm b^2+c^2 = 9,17 cm^2
c =2,48 cm

Atendidas as solicitações do professor, ao ser aplicado movimento nos vértices do triângulo *ABC*, na tela do computador descortinam-se diferentes triângulos retângulos e atualizam-se as medidas dos lados do triângulo e dos cálculos feitos. Mas tem-se em evidência, sempre, a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$.

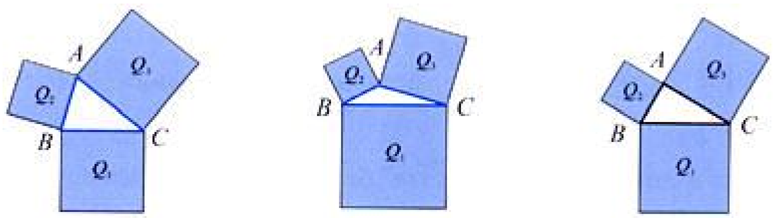
Com esses cálculos, muitos na aula informatizada se comparados com os poucos que são feitos na aula "giz-e-quadro-negro" (aqui, no geral, o exemplo a = 5, b = 4, c = 3), maiores são as evidências que ajudam o professor a convencer seus alunos quanto à veracidade da igualdade. E nisso a autoridade do professor tem um grande peso, tanto é que os alunos, normalmente, aceitam o resultado sem maiores questionamentos: ninguém coloca perguntas tais como *"mas, professor, se não testei todos os triângulos retângulos possíveis, como sei que isso sempre é verdade?", "como é que eu tenho certeza que os cálculos do computador são verdadeiros?", "isso só é verdade para triângulos retângulos?"...*

Ao final da atividade, os alunos passam a "conhecer" o teorema de Pitágoras, mas sem ter a oportunidade de apreciar de que forma a particularidade do triângulo, ser retângulo, é uma condição necessária e suficiente para que se verifique a igualdade obtida. Ou seja, os alunos se mantêm à margem do processo de demonstrar, de explicar a razão de tal propriedade via raciocínios dedutivos. Como isso poderia ser trabalhado pelo professor é o que vamos ilustrar na situação proposta a seguir.

Segunda situação: uma demonstração do teorema de Pitágoras como um caso particular da lei dos cossenos

A aula, nesta segunda situação, também inicia com os alunos recebendo instruções do professor que lhes dão espaço para pensar e para estabelecer as primeiras relações entre as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados de um triângulo qualquer:

> "*construa um triângulo qualquer* ABC; *sobre os lados do triângulo construa os quadrados* Q_1 , Q_2 *e* Q_3; *movimente o vértice* A *e compare a área de* Q_1 *com a soma das áreas de* Q_2 e Q_3([1])"

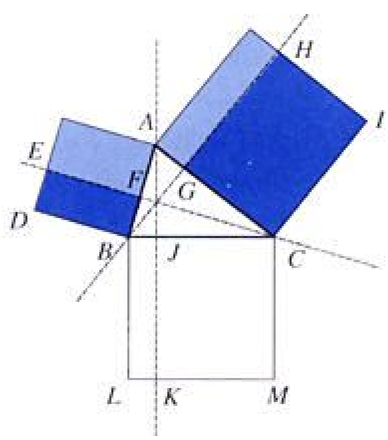


Dada a continuidade de variação das desigualdades, coloca-se naturalmente a pergunta: que propriedade deve ter o triângulo para que se tenha a igualdade entre as áreas?

Nesse momento, os recursos de medida e de calculadora que o programa oferece, podem ajudar: conforme a medida do ângulo *A* se aproxima de noventa graus, mais e mais as desigualdades entre as áreas tendem a uma igualdade, ou seja, o valor de a^2 se aproxima de b^2+c^2.

Acrescentando novos elementos geométricos à figura, junto com o uso de "figuras em movimento", o professor pode provocar os alunos para que avancem nos raciocínios que levam à demonstração da lei dos cossenos e que obtenham o teorema de Pitágoras como um caso particular dessa propriedade mais geral. Nesse momento é conveniente desdobrar a exploração em dois casos e, em ambos, os primeiros elementos geométricos a serem acrescentados, elementos chave que levam à dedução da lei dos cossenos, são as retas suporte das alturas do triângulo, relativas aos seus três lados.

Caso I: medida do ângulo A entre 0° e 90 °

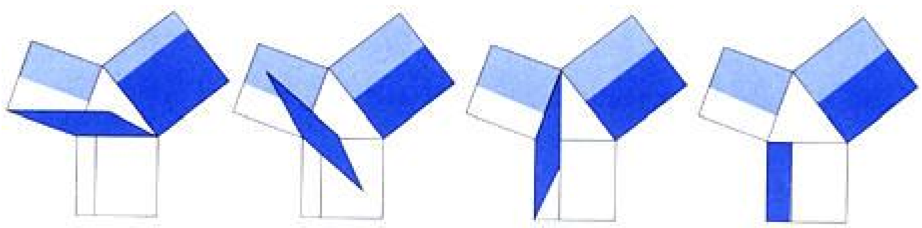


O traçado das retas suporte das alturas do triângulo indica uma decomposição de cada um dos quadrados em dois retângulos e essa decomposição encerra uma relação interessante entre áreas de pares de retângulos, a ser demonstrada via "figuras em movimento":

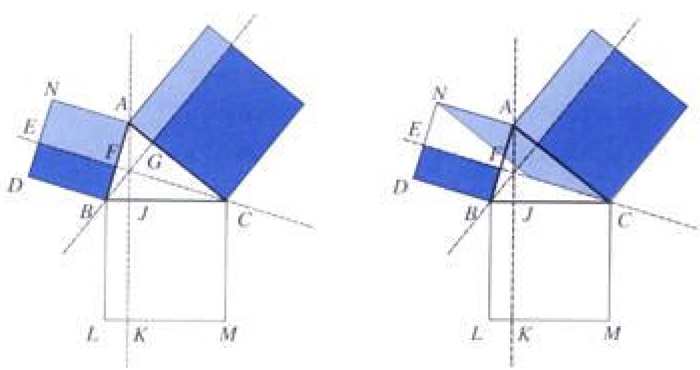
área de *BDEF* = área de *BJKL* (1)

área de *CGHI* = área de *CMKJ* (2)

O movimento inicia com o "deslize" de um dos lados do retângulo *BDEF*, paralelamente ao lado *BD*, até que um dos vértices coincida com o vértice *C* do triângulo. Nesse movimento obtém-se uma coleção de paralelogramos de área constante e igual à área do retângulo *BDEF*, já que todos eles têm como base o segmento *BD* e como altura um segmento de medida igual à distância entre duas retas paralelas fixas. O movimento seguinte é uma rotação do paralelogramo obtido ao final do movimento de deslizamento, em torno do vértice *B* e com ângulo de medida igual a 90°, e assim é obtido um novo paralelogramo sem que haja alteração no valor da área. Finalmente é "deslizado" um dos lados desse paralelogramo, paralelamente ao lado *BL*, até que um dos vértices coincida com *K*. Como antes, obtemos uma coleção de paralelogramos de área constante. Isso permite concluir a igualdade (1) entre as áreas dos retângulos *BDEF* e *BJKL*. De modo inteiramente análogo obtém-se a igualdade (2).



O próximo passo é determinar a diferença entre a área de Q_1 e a soma das áreas de Q_2 e Q_3 Ou seja, quer-se escrever uma relação de igualdade do tipo: $a^2 = b^2 + c^2 - x$ (3), sendo x a área excedente nos quadrados Q_2 e Q_3 a ser expressa em função de elementos do triângulo *ABC*. Novamente, através de "movimento de figura", determina-se a área do retângulo *AFEN*, correspondente ao excedente relativo ao quadrado Q_2 . O movimento inicia com o deslize de um dos lados do retângulo, paralelamente ao lado *NA*, até que um dos vértices coincida com *C*.



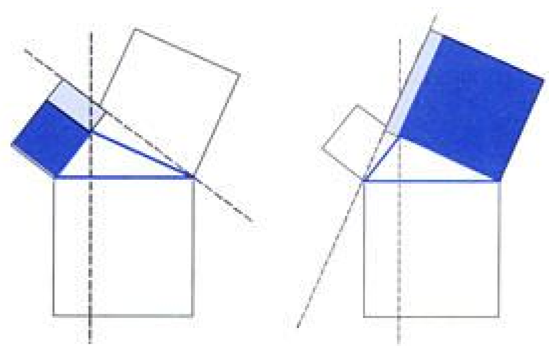
Como antes, nesse movimento temos uma coleção de paralelogramos, todos eles com a mesma área. A área do paralelogramo obtido ao final do movimento de "deslize' pode ser dada por:

$$\frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}(90+\widehat{A}) = bc\cos\widehat{A}.$$

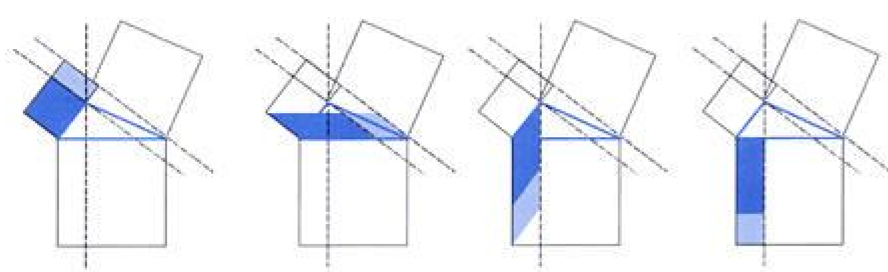
De modo análogo obtém-se para área do retângulo, parte do excedente na desigualdade (1) relativa ao quadrado Q_3, *o* mesmo valor $bc\cos\widehat{A}$. Dessa forma tem-se que, na igualdade (3), o valor de *x é* $2bc\cos\widehat{A}$ *e* assim demonstramos a lei dos cossenos, para o caso de triângulos acutângulos: $a = b + c - 2bc\cos\widehat{A}$.

Caso 2: medida do ângulo *A* entre 90° e 180°

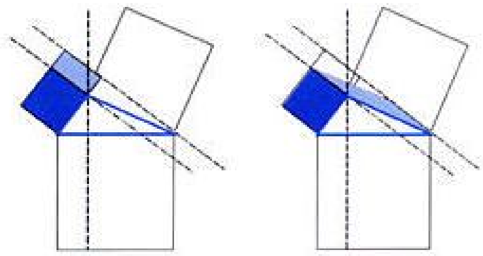
Relembramos que neste caso vale a relação:
área Q_1 > área Q_2+ área Q_3 Queremos transformá-la em uma igualdade do tipo: $a^2=b^2+c^2+y$ (4), sendo y a área a ser acrescida aos quadrados Q_2 e Q_3 , e a ser expressa em função de elementos do triângulo *ABC*. Como antes, as retas suporte das alturas do triângulo tornam-se elementos fundamentais, pois vão indicar de que forma pode ser feito o acréscimo de área aos quadrados Q_2 e Q_1, indicado separadamente na figura abaixo:



A demonstração para este caso é análoga à demonstração feita para os triângulos acutângulos. Omitiremos os detalhes e vamos apenas exibir uma sequência de figuras que sugere como fazer a argumentação. Na primeira sequência a seguir (restrita ao quadrado Q_2), indicamos como se explica a igualdade entre a área do quadrado Q_1 e a soma das áreas dos retângulos construídos acima, cada um deles contendo um dos quadrados:



Na próxima seqüência indicamos como se calcula o valor de *y*, o acréscimo de área que garante a igualdade (4). Olhando-se somente para o quadrado Q_2 (analogamente para o quadrado Q_3) e lembrando que, neste caso, $\cos\widehat{A} < 0$,tem-se que o acréscimo de área é dado por :



$$\frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}[90(180-A) = -bc\cos\widehat{A}. \text{ Assim temos novamente } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Na situação em que , $\widehat{A} = 90°$ a reta suporte da altura relativa ao lado *AB* coincide com o lado *AC* do triângulo *ABC*, quando então desaparece a subtração ou adição de áreas aos quadrados Q_2 e Q_3 A figura a seguir mostra que $a^2 = b^2 + c^2$, *o* teorema de Pitágoras.

As duas situações de sala de aula aqui apresentadas ilustram diferentes modos de utilização de programas de geometria dinâmica. E é na segunda situação proposta que podemos engajar os alunos no entendimento de um belo e simples teorema da geometria, o teorema de Pitágoras, e com as "figuras em movimento" dá-se a possibilidade de melhor visualizar os raciocínios dedutivos que levam à demonstração do caso mais geral da lei dos cossenos.

---

(1) Nas instruções de construção, podem-se colocar certas restrições de forma tal que o uso de movimento na figura direcione-se para o estabelecimento de desigualdades/igualdades. No caso, é interessante fixar os vértices *B e C e* permitir movimento do vértice *A em* uma reta fixa que seja perpendicular ao lado *BC*. Com esse movimento restrito, os alunos são orientados a concentrar-se nos aspectos relevantes da questão.

Marcus Alexandre Nunes é aluno e *Maria Alice Gravina é* professora do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, com especial interesse no uso da tecnologia informática na sala de aula. marcus_nath@yahoo.com.br gravina@mat.ufrgs.br